

Что такое число e и как его вычислять?

И. И. Иванов

Аннотация

Число e в школьной математике определяется чисто геометрически. Здесь мы покажем, как из этой геометрии можно извлечь второй замечательный предел.

1 Геометрическое определение

Число e можно определить как основание, для которого график функции $y = e^x$ пересекает ось Oy под углом 45° . Другими словами, в точке $(0, 1)$ прямая $y = 1 + x$ касается графика экспоненты [1]. Это, в свою очередь, можно записать так

$$e^x \approx 1 + x \quad \text{при малых } x. \quad (1)$$

2 Второй замечательный предел

Для большого числа N величина $1/N$ мала, поэтому, в силу (1),

$$e = e^1 = e^{\frac{1}{N}N} = (e^{\frac{1}{N}})^N \approx \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N.$$

Но это и есть второй замечательный предел [2]

$$e = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N.$$

3 Вычисление e на калькуляторе

На самом примитивном калькуляторе с удовлетворительной точностью e можно вычислить следующим образом

$$e \approx (1 + 1/2^{10})^{2^{10}} = (1 + 1/1024)^{2^{10}} = ((((((((((1 + 1/1024)^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2).$$

Список литературы

- [1] *Алгебра и начала математического анализа*, Просвещение, 2008
- [2] В. А. Зорич, *Математический анализ*, т. 1, МЦНМО, 2007